LA MECÀNICA CELEST A L'OBRA DE POINCARÉ

per

Jaume Llibre i Saló

1. Introducció

La Mecànica Celest és una branca de les Matemàtiques que estudia els moviments dels cossos celests a partir de les lleis de la Mecànica. Com deia Henri Poincaré, la Mecànica Celest ens convenç de l'existència de lleis en la naturalesa i ens ensenya quant infinitament precises arriben a ésser. La història de la Mecànica Celest és molt variada i tremendament llarga, car s'inicia al mateix temps que l'Astronomia i arriba fins als nostres dies. L'objecte d'aquesta conferència serà molt més limitat, ja que ens restringirem a parlar de la contribució de Poincaré a la Mecànica Celest. Tot i així, tenint en compte que el treball de Poincaré en aquest camp fou per un costat molt extens i per l'altre molt profund en nous conceptes i idees, ens veiem forçats a comentar superficialment els aspectes al nostre entendre més importants de l'obra de Poincaré dins la Mecànica Celest.

D'una manera molt simplificada, l'objecte de la Mecànica Celest consisteix a estudiar un sistema d'equacions diferencials conegut com el problema dels n cossos. Aquest problema estudia el moviment de n masses puntuals en l'espai euclidià tridimensional sota les lleis de la gravitació newtoniana. Si x_k és la posició del k-èsim cos respecte a un sistema de referència inercial i m_k n'és la massa, llavors el moviment dels n cossos és donat pel següent sistema d'equacions diferencials:

$$\ddot{x}_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} m_j \frac{x_j - x_k}{\|x_j - x_k\|^3} ,$$

on $k = 1, \ldots, n$ i $\|x_j - x_k\|$ denota la distància euclidiana entre m_j i m_k.

Físicament el model donat pel problema de n cossos és un model idealitzat. Com que els cossos no són puntuals, les lleis de gravitació no han pas d'ésser les newtonianes, l'espai no ha pas d'ésser l'euclidià, etc. Emperò, a falta d'una comprensió millor de les lleis físiques que governen el moviment dels astres, hom agafa el problema de n cossos com a model.

Hom sap molt poca cosa del problema de n cossos quan $n \geqslant 3$, i per això el problema de 3 cossos és objecte d'un gran nombre de simplificacions.

Així, hom estudia els problemes restringits de 3 cossos, això és, els problemes de 3 cossos en què una de les masses és infinitesimal, de manera que la influència que exerceix damunt les altres dues és menyspreable. Per tant, el moviment d'aquestes és el d'un problema de 2 cossos, i el problema restringit de 3 cossos consisteix a descriure el moviment del cos de massa infinitesimal.

D'entre tots els problemes restringits de 3 cossos, el més clàssic és el problema restringit, circular i pla de 3 cossos: si emprem un sistema d'eixos giratoris (x, y) en el qual els dos cossos de massa positiva m_1 i m_2 (anomenats primaris) són en repòs, ens interessem pel moviment d'un tercer cos de massa nul·la sota l'acció gravitatòria dels dos primaris. D'ara endavant, quan parlem del problema restringit de 3 cossos ens referirem al problema restringit, circular i pla de 3 cossos.

El problema restringit de 3 cossos ha tingut i té una importància de primer ordre. En efecte, pel matemàtic es presenta com un dels exemples més característics de sistema dinàmic no integrable, mentre que per l'astrònom constitueix la base més sòlida per al càlcul d'efemèrides, el moviment de la lluna, etc.

Fou l'astrònom americà G. W. Hill el primer que mostrà la importància d'aquest problema no tan sols per al càlcul de les efemèrides sinó també pel seu interès matemàtic. Poc de temps després, Poincaré començà a desenvolupar àmpliament les vies matemàtiques a penes obertes per Hill. En la seva magnífica obra "Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste", publicada els anys 1892-1899, Poincaré estudia bàsicament aquest problema i ja no deixà d'estudiar-lo mai, com ho justifica el seu darrer article "Sur un théorème de Géomètrie" publicat en els *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* el 1912.

2. Integrals primeres

El problema de n cossos equival a un sistema diferencial de 6n equacions de primer ordre. Aparentment, el camí més simple de resoldre aquest problema seria el de trobar 6n integrals primeres. Són clàssiques les integrals primeres del centre de masses i de la seva velocitat, del moment angular i de l'energia, fent un total de 10 integrals primeres. Per tant, hom té una reducció a un sistema de 6n - 10 equacions. Degut a les simetries del problema hom pot reduir la dimensió com a mínim en una equació més (eliminació del node de Jacobi) i en una altra si eliminem el temps com a variable independent. Al cap i a la fi hom té una reducció a un sistema de 6n - 12 equacions. Doncs, el problema de 2 cossos queda resolt.

En temps de Poincaré i en un principi hom encara confiava que podria trobar més integrals primeres. Però els següents teoremes feren perdre l'esperança d'avançar en la solució del problema de n cossos cercant més integrals primeres.

Teorema (Bruns 1887): Tota integral primera del problema de n cossos algèbrica en posicions (x) i velocitats ($\dot{x}$) és funció algèbrica de les clàssiques.

Teorema (Painlevé 1896-1898): Tota integral primera del problema de n cossos algèbrica en les velocitats és funció algèbrica de les clàssiques.

Teorema (Poincaré 1889): Sigui $H = H_0 + \mu H_1 + \mu^2 H_2 + \ldots$ el hamiltonià del problema de n cossos desenvolupat en potències d'un petit paràmetre μ (per exemple, la massa d'un dels cossos). Suposem que H és analític en μ, $H_0 = H_0$ (p) (independent de q), H_k per a $k > 0$ funcions de p, q, 2π-periòdiques en q. Suposem, a més, que per a cada cos p_i, q_i són variables canòniques associades als elements el·líptics. Llavors el sistema hamiltonià $p_i = -dH/dq_i$, $q_i = dH/dp_i$ no té altres integrals primeres analítiques en μ, p, q i 2π-periòdiques en q que les clàssiques.

En resum aquests teoremes ens diuen que no hi ha altres integrals primeres fora de les clàssiques, que siguin algèbriques en els moments i analítiques en els elements orbitals el·líptics. Aquests resultats provocaren que en temps de Poincaré hom treballés més intensament que no havia estat fet fins aleshores en la teoria de pertorbacions, a fi d'avançar en l'estudi de la solució del problema de n cossos per un camí diferent del de buscar més integrals primeres. Recordem que els elements orbitals són sis paràmetres que permeten determinar la posició i el moviment d'una òrbita que soluciona el problema de 2 cossos a l'espai.

Avui en dia les experiències numèriques fetes per ordinador sembla que confirmen que no existeixen més integrals primeres que les clàssiques. De fet hom ha demostrat que alguns problemes restringits de 3 cossos no són integrables, és a dir, no tenen prou integrals primeres perquè el sistema estigui resolt. Aquests resultats no ens han de sorprendre car recentment hom ha provat que genèricament (per a un subconjunt dens en el total) els sistemes hamiltonians només tenen una integral primera de classe C^1 que és el mateix hamiltonià.

3. La teoria de pertorbacions

La teoria de pertorbacions permet d'un costat calcular en un interval de temps finit i amb una certa precisió el moviment del planetes, satèl·lits, la lluna, satèl·lits artificials, vehicles interplanetaris, etc., i d'un altre fer estudis teòrics com els que han permès descobrir nous planetes, determinar-ne la massa, estudiar la captura o evasió de cometes per part del sistema solar, etc.

La teoria de pertorbacions consisteix en un mètode iteratiu infinit en què ens apropem a la solució per aproximacions successives. Així, tenim els mètodes clàssics de Laplace, Lagrange, Newcomb, Lindstedt, Delaunay, von Zeipel, Poincaré, Bohlin, Whittaker, etc. Tots aquests mètodes no fan estimació de l'error que hom comet en tallar el procés iteratiu i obtenir una solució aproximada. El mètode més modern de Krylov-Bogoliulov sí que estima l'error.

Si l'òrbita real s'allunya lentament d'una òrbita kepleriana (una òrbita solució del problema de 2 cossos), hom pot prendre aquesta com a primera aproximació. En altres casos és més interessant prendre com a primera aproximació altres òrbites, com ara l'òrbita periòdica de Hill per al moviment de la lluna, o les del problema de dos centres fixos com hom fa en la teoria de Vinti d'un satèl·lit artificial en el camp gravitatori terrestre, etc.

El mètode usual de la teoria de pertorbacions consisteix a desenvolupar la solució en sèrie de Fourier de diverses variables, on els coeficients es fan dependre de les masses pertorbadores i dels elements orbitals de l'òrbita que es pertorba, i els arguments són funcions lineals del temps. Desgraciadament, ha estat provat que aquesta solució formal en sèrie de Fourier no convergeix pas uniformement, d'acord amb resultats de Bruns i *Poincaré*. El problema de la no convergència d'aquestes sèries és íntimament relacionat amb el problema dels petits divisors i aquest al seu torn amb els nombres de Liouville.

Per tal d'entendre quin és el problema dels petits divisors analitzem una mica el mètode de la teoria de pertorbacions degut a Lagrange i que és conegut amb el nom de variació dels elements. Si l'òrbita real s'allunya lentament d'una òrbita kepleriana, llavors els elements orbitals no són constants però varien poc a poc i llur variació depèn de les masses pertorbadores. Hom determina la variació d'aquests elements resolent les equacions variacionals iterativament, és a dir, hom resol primer les de primer ordre, després les de segon ordre, etc... Concretament, si a és un dels elements orbitals, llavors l'equació diferencial per a determinar-ne la variació, si només hi ha una massa pertorbadora, té la forma

$$\frac{da}{dt} = \mu \sum_{k_1,k_2} a_{k_1 k_2} \cos(k_1 l_1 + k_2 l_2 + g),$$

on $l_1 = n_1 t + \epsilon_1$, i $l_2 = n_2 t + \epsilon_2$. El segon terme representa la pertorbació. La petita constant μ és de l'ordre de la massa pertorbadora, k_1 i k_2 varien en tots els enters, les quantitats $a_{k_1 k_2}$, g, n_1, n_2, ϵ_1, ϵ_2 són funcions dels elements, n_1 i n_2 són coneguts amb el nom de moviment mitjà. Òbviament, el terme de la dreta és una sèrie trigonomètrica amb funcions lineals del temps com a arguments. Com que la variació dels elements és petita degut al factor μ, considerant en primera aproximació els elements de la dreta com a constants i integrant l'equació respecte a t, obtenim

$$\delta a = \mu \sum_{k_1, k_2} \frac{a_{k_1 k_2}}{k_1 n_1 + k_2 n_2} \sin(k_1 l_1 + k_2 l_2 + g) + \text{constant.}$$

Hom diu que aquesta solució és la pertorbació de primer ordre. Després de substituir aquesta nova solució en l'equació diferencial variacional, tornem a integrar, considerant de nou que l'única variació en el segon terme és deguda explícitament al temps, i obtenim la pertòrbació de segon ordre, i així reiteradament.

Aquest mètode falla formalment si $k_1 n_1 + k_2 n_2 = 0$. En aquests casos termes multiplicats per t apareixen en el desenvolupament en sèrie. Noteu que la suma $k_1 n_1 + k_2 n_2$ pot ésser tan petita com es vulgui, si prenem k_1 i k_2 convenientment grans (tal com ens ho assegura un teorema de Kronecker). Llavors ens apareix un petit divisor en el denominador. Aquests petits divisors fan que la sèrie no convergeixi uniformement si n_1/n_2 és un nombre de Liouville.

Un nombre real r és aproximable per racionals fins a un ordre k si per tot $\epsilon > 0$ l'equació $|r - p/q| < \epsilon/q^k$ té almenys una solució p/q racional. Els nombres que hom pot aproximar per a tot ordre són per definició els nombres de Liouville.

Les sèries, per bé que no siguin uniformement convergents, poden representar la solució durant un interval de temps limitat si trunquem la sèrie convenientment. Aquest fet fou anomenat semi-convergència per *Poincaré*; avui diríem que la sèrie té un caràcter asimptòtic.

Una sèrie de Fourier amb funcions lineals del temps com a arguments, quan convergeix uniformement representa una funció quasi-periòdica. Aquest fet permeté que Kolmogorov i Arnold intuïssin que si la raó n_1/n_2 satisfà certes desigualtats, llavors el moviment pertorbat podria ésser representat per funcions quasi-periòdiques i per tant ésser dens sobre un tor distorsionat obtingut a partir d'un tor del sistema no pertorbat. Com que el sistema no pertorbat és integrable, ja se sap, pel teorema de Liouville-Arnold, que les òrbites afitades són sobre tors.

4. L'aplicació de Poincaré

Poincaré, possiblement desenganyat per la manca de convergència uniforme dels desenvolupaments en sèrie, inicià l'estudi qualitatiu i topològic del problema de n cossos, que permet d'estudiar el moviment en un interval de temps infinit.

Una eina molt important en l'estudi d'un sistema dinàmic és l'aplicació que avui és anomenada de Poincaré, car fou *Poincaré* qui la començà a emprar d'una manera sistemàtica en els seus treballs. Aquesta aplicació permet de reduir l'estudi del sistema dinàmic a una aplicació que utilitza el conegut artifici de la hipersuperfície de secció. Les propietats essencials del flux del sistema dinàmic són representades de manera més clara i més condensada per l'aplicació. Per exemple, una òrbita periòdica del flux és traduïda per un punt fix o periòdic de l'aplicació de Poincaré; una òrbita quasi-periòdica que recobreix un tor invariant dins l'espai de fases és traduïda per una successió de punts situats sobre una corba (si la superfície de secció és 2-dimensional), etc...

En el cas d'un sistema hamiltonià de 2 graus de llibertat, l'espai de fases té dimensió 4. Si estudiem el flux del sistema a un nivell d'energia constant (car el hamiltonià és una integral primera del sistema), l'espai ambient té dimensió 3. I si ara prenem en aquest espai una hipersuperfície de secció, aquesta tindrà dimensió 2, és a dir, serà una superfície de secció. Per tant, sobre aquesta, les propietats essencials de les diferents òrbites seran clarament visibles.

Quan el nombre de graus de llibertat n és superior a 2, la situació és molt més difícil, ja que la hipersuperfície de secció té dimensió $2n - 2$. Per a $n = 3$ ja té dimensió 4. I no és possible de representar directament els resultats, de manera que es perd un dels principals avantatges del mètode.

Una "bona" superfície de secció ha de verificar certes condicions:

(1) Convé, si és possible, que totes les òrbites tallin aquesta superfície. No sempre és així. Agafem l'exemple del problema restringit de 3 cossos. Si volem estudiar les òrbites dels "satèl·lits" que giren al voltant de m_1 o de m_2, serà natural considerar l'aplicació de Poincaré definida per les interseccions successives de l'òrbita amb l'eix x. Però també existeixen òrbites dignes d'interès al voltant dels punts d'equilibri de Lagrange L_4 i L_5; aquestes òrbites no tallen mai l'eix x, i per tant no podran ésser estudiades per l'aplicació de Poincaré considerada (fig. 1).

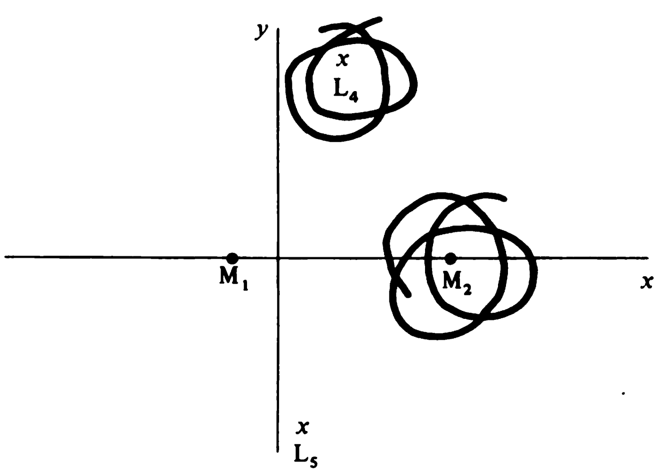

Figura 1

(2) No hi ha d'haver òrbites tangents a la superfície de secció, car això crearia una discontinuïtat artificial de l'aplicació. A una variació contínua del punt P_0 correspondria una variació discontínua del punt següent, P_1, en el moment en què l'òrbita és tangent (fig. 2).

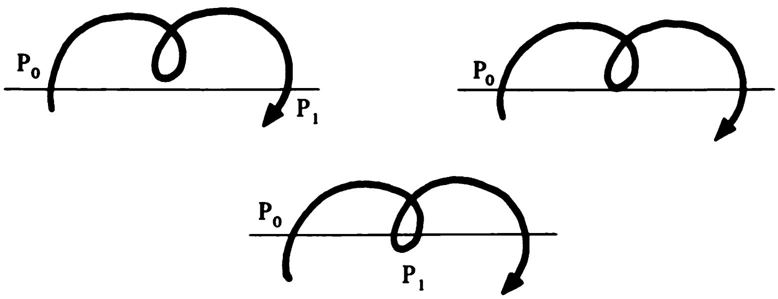

Figura 2

(3) Convé que les òrbites tallin indefinidament la superfície, si no, alguns punts no tindran imatge, i només obtindríem una successió finita de punts, de poc interès. Això pot ocórrer fàcilment en sistemes no conservatius (fig. 3). Per contra, en un sistema conservatiu, si la regió accessible pel flux en l'espai de fases té un volum finit, el teorema de recurrència de *Poincaré* (vegeu § 7) garanteix que tota òrbita que surti d'un punt de la superfície de secció la tallarà indefinidament.

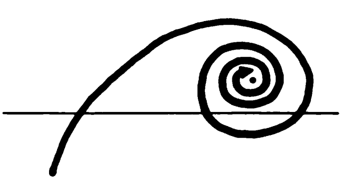

Figura 3

Notem que si, en un sistema dinàmic donat, hom canvia la superfície de secció, l'aplicació obtinguda canvia no sols quantitativament sinó àdhuc qualitativament. Per exemple, el nombre de punts invariants i d'illes associades a una òrbita periòdica pot variar (fig. 4).

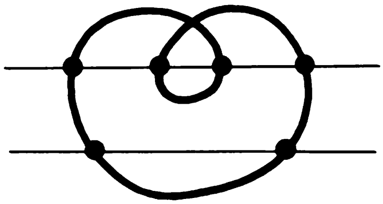

Figura 4

Recordem que hom pot escollir l'aplicació de Poincaré associada a un sistema hamiltonià de manera que preservi l'àrea.

Hi ha una dificultat fonamental en l'exploració numèrica d'una aplicació. Un punt invariant estable està voltat d'una família de corbes invariants, però cada vegada que el nombre de rotació passa per un valor racional la corba invariant es trenca en un arxipèlag d'illes. Com que el nombre de rotació varia de manera contínua, existeix una infinitat d'arxipèlags d'aquests, que omplen la superfície de manera densa. I això no ho és tot: cada illa té al seu voltant una estructura reduïda semblant a la total, cosa que implica l'existència d'"illes de segon ordre", i així reiteradament. Hom obté, per tant, una jerarquia infinita d'estructures cada cop més fines (fig. 5). En el cas d'un problema pràctic això significa desgraciadament que hom no pot esperar de donar una descripció completa del conjunt de solucions. Cal resignar-se a un cert grau d'aproximació.

El problema restringit de 3 cossos abans descrit pot ésser mirat com un sistema dinàmic conservatiu autònom de 2 graus de llibertat. Hom el redueix a tercer ordre emprant la coneguda integral de Jacobi (deguda a Euler), i fou *Poincaré* el primer que féu la reducció en estudiar una aplicació d'una superfície de secció en ella mateixa. De fet *Poincaré* considerà aquesta aplicació quan volia estudiar les solucions periòdiques del problema restringit (vegeu § 5). Els tres volums de la seva obra "Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste" són en gran part dedicats a aquestes qüestions.

Fou el problema restringit de 3 cossos el que conduí *Poincaré* a establir, quan estudiava les corbes invariants passant per un punt hiperbòlic de la superfície de secció, les nocions de "varietats invariants", "punts homoclínics", "punts heteroclínics",... i a anunciar l'extrema complexitat de la figura que hom obtenia sobre la superfície de secció (fig. 5). La importància d'aquests conceptes introduïts per *Poincaré* ha esdevingut essencial en l'estudi qualitatiu i quantitatiu dels sistemes dinàmics.

Aquests darrers anys han aparegut centenars de treballs que empren l'aplicació de Poincaré. Especialment treballs de tipus numèric. En el cas d'aplicacions de Poincaré que preserven l'àrea, que són les usuals en Mecànica Celest, aquests treballs posen de manifest que la superfície de secció pot

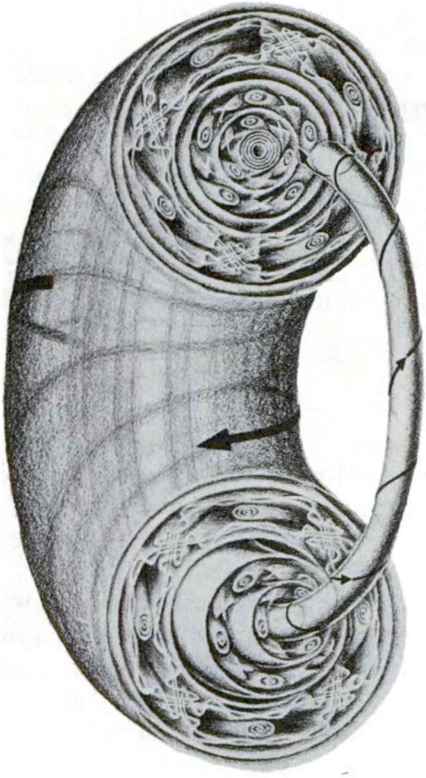

Figura 5

ésser dividida en dues grans regions: una "regió d'estabilitat", on el sistema es comporta quasi com si fos integrable, i una "regió estocàstica" on el comportament de les successives iteracions de l'aplicació sembla que tendeixi a omplir una regió d'àrea positiva. Aquest fet té una gran importància car el comportament de les solucions canvia radicalment quan hom passa d'una regió a l'altra.

El teorema de Kolmogorov-Arnold-Moser (teorema K.A.M.) ens dóna una justificació qualitativa d'aquest fenomen, però no pas quantitativa, ja que demostra l'existència de corbes invariants, però només en un entorn extremadament petit al voltant d'un punt fix estable. L'experiència indica que les corbes invariants existeixen en una regió molt més gran, que té dimensions del mateix ordre que les dimensions naturals del sistema estudiat.

La pràctica constata que la dissolució de les corbes invariants es produeix en el moment que hom assoleix un cert cicle de punts fixos inestables. Però hi ha una infinitat de cicles d'aquests, i ens podem preguntar per què un d'aquests provoca la dissolució i no l'altre. D'una altra banda, la situació no sempre és tan clara, car a vegades el límit de la regió d'estabilitat és mal definit, i no sembla que estigui associat a un cicle particular. D'un punt de vista teòric hom podria dir que aquesta qüestió no té pas sentit, ja que cada cicle inestable engendra una regió estocàstica anul·lar; per tant, dins de la regió d'estabilitat hi ha una infinitat de regions estocàstiques, i hom pot considerar que la regió exterior és simplement una d'aquestes regions que resulta que és més gran que les altres. D'un punt de vista pràctic la qüestió té molt de sentit, perquè és important saber si les successives iteracions estaran confinades a una certa regió de la superfície o, al contrari, podran escapar-se'n.

5. Òrbites periòdiques

Fins a ben entrat el segle XX la major part dels resultats que hom tenia sobre òrbites periòdiques en el problema de n cossos feien referència a les òrbites periòdiques del problema restringit esmentat al § 1. Per tant, el contingut d'aquesta secció és dedicat a les òrbites periòdiques d'aquest problema restringit.

Poincaré considerava que les òrbites periòdiques són l'única porta oberta per la qual pot ésser abordat l'inaccessible problema de 3 cossos. La seva famosa conjectura sobre les òrbites periòdiques ens en justifica el perquè.

Conjectura: Donada una òrbita afitada del problema restringit i qualsevol interval de temps finit, sempre existeix una òrbita periòdica (la qual pot tenir un període molt gran) tal que la diferència entre aquestes dues òrbites és tan petita com hom vulgui durant l'interval de temps donat.

Una altra versió d'aquesta conjectura és la deguda a Schwarzschild: en tot entorn d'un punt de l'espai de fases (del problema restringit) corresponent a una òrbita afitada hi ha un punt corresponent a una òrbita periòdica.

Si la conjectura és certa, tal com semblen confirmar-ho tots els resultats parcials que hom té fins ara, siguin numèrics o analítics, tota solució afitada podria ésser considerada com una petita pertorbació d'una solució periòdica durant un interval de temps tan gran com volguéssim.

Hi ha moltes altres raons que justifiquen l'estudi de les òrbites periòdiques. Algunes d'aquestes podrien ésser

(1) sembla (com conjecturà Darwin) que en la classificació de totes les òrbites les periòdiques representen un paper important pel fet que separen diferents classes d'òrbites;

(2) algunes òrbites periòdiques del problema restringit poden ésser obtingudes analíticament a partir de les solucions del problema de 2 cossos;

(3) les òrbites periòdiques poden ésser computades numèricament amb la precisió que hom vulgui.

Immediatament després d'haver aparegut la teoria de la lluna deguda a Hill, basada en una solució periòdica com a primera aproximació del moviment de la lluna, la teoria d'òrbites periòdiques fou començada per *Poincaré*.

Els dos mètodes creats per *Poincaré* per trobar òrbites periòdiques, el mètode de continuació analítica i el d'emprar teoremes de punt fix en fer l'estudi topològic de les trajectòries sobre la varietat del moviment, han influït molt damunt els matemàtics posteriors. Així, les idees del primer mètode, a més de portar als mètodes de continuació actuals, conduïren Morse al càlcul de variacions; i les del segon han anat, d'una banda, cap a l'estudi topològic del flux d'una equació diferencial, és a dir, a la teoria qualitativa dels sistemes dinàmics tal com la coneixem avui, i de l'altra cap als teoremes de punt fix de Birkhoff, Brouwer, Nielsen...

La idea del mètode de continuació analítica consisteix a emprar una òrbita periòdica coneguda, P, del problema restringit, quan un dels primaris té de massa zero, per exemple $m_2 = 0$, i veure que existeix una òrbita periòdica prop de P quan el primari m_2 té massa positiva però prou petita. Noteu que el problema restringit, quan un dels primaris té de massa zero, equival a un problema de 2 cossos en coordenades giratòries. Si l'òrbita coneguda P és circular o el·líptica, les òrbites periòdiques que hom obté a partir d'aquestes pel problema restringit foren anomenades per *Poincaré* de primera i segona espècie respectivament. Les òrbites de tercera espècie, també degudes a *Poincaré*, requereixen l'ús d'unes coordenades adequades.

Un altre concepte estudiat per Poincaré fou el de l'estabilitat d'una òrbita periòdica. Parlant grollerament, direm que una òrbita periòdica és estable si tota òrbita suficientment pròxima a aquesta roman indefinidament al seu entorn (per analitzar l'estabilitat *Poincaré* introduí els exponents característics). En termes de l'aplicació de Poincaré associada a una superfície de secció que talli transversalment l'òrbita periòdica, l'estabilitat implica l'existència d'una infinitat de corbes invariants tancades al voltant d'un punt fix corresponent a l'òrbita periòdica. Aquest fet, ja conegut per *Poincaré*, fou provat al cap de molts anys per Kolmogorov, Arnold i Moser (teorema K.A.M.). Per a l'estudi d'aquestes corbes invariants *Poincaré* definí l'important concepte de nombre de rotació (vegeu § 4), que dit bastament és l'angle mitjà de gir en passar d'un punt a la seva imatge per l'aplicació de Poincaré.

6. El darrer teorema geomètric de Poincaré

Per provar l'existència de solucions periòdiques en el problema restringit quan la massa d'un dels primaris és petita, *Poincaré*, el 1912, enuncià un teorema que Birkhoff anomenà el darrer teorema geomètric de Poincaré, ja que Poincaré morí aquell mateix any. Poincaré deia que havia intentat demostrar-lo durant dos anys sense assolir-ho, però com que el considerava important preferia publicar-lo i deixar-ne la demostració per a algun feliç matemàtic. El feliç matemàtic fou Birkhoff (1913).

Teorema. Suposem que un homeomorfisme T aplica l'anell A, determinat per dos cercles concèntrics C_a i C_b de radis a i b respectivament, $a > b > 0$, en ell mateix, de manera que faci avançar els punts de C_a en sentit positiu i els punts de C_b en sentit negatiu, i que alhora preservi l'àrea. Llavors hi ha almenys dos punts fixos per T.

Aquest teorema ha estat àmpliament generalitzat i ha esdevingut un dels teoremes de punt fix de la topologia algèbrica.

Normalitzem les masses dels dos primaris del problema restringit de manera que $m_1 = 1 - \mu$ i $m_2 = \mu$, on $\mu \epsilon [0,1]$. Siguin (r, θ) les coordenades polars del cos de massa infinitesimal respecte al centre de masses. Per a un valor fix de la constant de Jacobi, sigui Σ_μ la superfície de secció del problema restringit, amb paràmetre de masses μ, definida per $\dot{r} = 0$, $\ddot{r} > 0$ (pas pel pericentre) sobre les òrbites afitades; i sigui T_μ l'aplicació de Poincaré definida sobre Σ_μ. Això és, per a tot punt $p \epsilon \Sigma_\mu$, sigui p' el punt de l'òrbita que passa per p quan torna a tallar Σ_μ per primera vegada; llavors $T_\mu(p) = p'$.

Si μ és prou petit, existeixen anells $A_i \subset \Sigma_\mu$ tals que l'aplicació de Poincaré sobre A_i és donada per $T_\mu(r, \theta) = (r', \theta')$, essent

$$r' = r + \mu g_1(r, \theta, \mu),$$
$$\theta' = \theta + f(r) + \mu g_2(r, \theta, \mu) \ (\text{mòd } 2\pi),$$

on f, g_1 i g_2 són reals, analítiques i 2π-periòdiques en θ. A més,

$$\left|\frac{df}{dr}\right| > 0$$

i T_μ preserva l'àrea.

L'estudi d'aquesta aplicació T_μ és el que portà *Poincaré* a enunciar el seu darrer teorema geomètric.

L'aplicació T_μ per $\mu = 0$ és una aplicació *twist.* Això és, T_0 fa girar cada cercle $r = c$ un angle f(c). Llavors cada cercle és invariant per T. El fet que, per μ prou petit, T_μ continuï tenint corbes invariants tals que si μ tendeix a zero, aquestes corbes tendeixen a cercles, és el teorema K.A.M. Un altre cop tornem a trobar una llavor d'aquest important teorema en els treballs de Poincaré.

7. El teorema recurrent de Poincaré

Considerem el moviment d'un punt P dins un espai euclidià n-dimensional Σ definit per

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i \qquad (i = 1, 2, ..., n).$$

Si tenim

$$\frac{d\,(MF_1)}{d\,x_1} + \ldots + \frac{d\,(MF_n)}{d\,x_n} = 0,$$

llavors existeix un invariant integral

$$J = \int \ldots \int M dx_1\, dx_2 \ldots dx_n .$$

Teorema recurrent de Poincaré. Suposem que les coordenades x_1, x_2, ..., x_n d'un punt P en un espai n-dimensional Σ són sempre finites i que existeix un invariant integral

$$\int \ldots \int M dx_1\, dx_2 \ldots dx_n .$$

Si aquesta integral sobre tot Σ és finita, llavors existeix en Σ un nombre infinit de trajectòries que passen infinites vegades a través de qualsevol regió arbitràriament petita **R** continguda a Σ. Com a casos excepcionals un nombre finit de trajectòries passen a través de **R** només un nombre finit de vegades, això és, la probabilitat que es donin aquests casos excepcionals és zero.

Aquest teorema fou el primer pas cap a el teorema ergòdic. Primerament fou refinat per Carathéodory, Khintchine i Hopf. El teorema ergòdic és el fonament de la teoria cinètica dels gasos deguda a Maxwell i Boltzmann. Fent servir la teoria espectral d'un sistema dinàmic von Neumann formulà el teorema ergòdic en un espai de Hilbert. Més tard fou estès a processos de cadenes de Markov, tant en el cas continu com en el cas discret, per Hostinsky, Riesz, Doob, Kakutani, Yosida, Krylov i Bogoliubov, i altres. El teorema de von Neumann és generalitzat a espais de Banach. La idea és desenvolupada per Kolmogorov, Sinai, Gelfand, Fomin, Arnold i altres, fins a arribar als K-automorfismes i a l'entropia. Alekseev defineix els sistemes dinàmics quasi aleatoris i Kolmogorov, Ornstein i Shields desenvolupen les idees del *shift* de Bernoulli i d'entropia.

REFERÈNCIES

Abraham, R., Marsden, J.E.: "*Foundations of Mechanics*", Benjamin, 1978.

Arnold, V.I.: "Small denominators and problems of stability of motion in Classical and Celestial Mechanics", *Russ. Math. Suerveys,* 18 (1963), 85-192.

Arnold, V.I.: "Proof of a theorem of A.N. Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations of the hamiltonian". *Russ. Math. Surveys,* 18 (1963), 9-36.

Arnold, V.I.: "Instability of dynamical systems with several degrees of freedom", *Soviet Math. Dokl.,* 5 (1964), 581-585.

Arnold, V.I., Avez, A.: *Ergodic problems of Classical Mechanics,* Benjamin, 1968.

Birkhoff, G. D.: *Dynamical Systems,* Am. Math. Soc., 1927.

Birkhoff, G. D.: *Collected mathematical papers,* vol. I, II i III, Am. Math. Soc., 1950.

Casasayas, J., Llibre, J.: "Invariant manifolds associated to homothetic orbits in the n-body problem", *Indiana Univ. Journal of Math.* 31 (1982), 463-470.

Gómez, G., Llibre, J.: "A note on a conjecture of Poincaré", *Celestial Mechanics,* 24 (1981), 335-343.

Gómez, G.: "Sobre òrbites periòdiques en el problema restringit de 3 cossos", per aparèixer.

Hagihara, Y.: *Celestial Mechanics,* I i II, M. I. T. Press, 1970 i 1972; III, IV i V, Japan Society for the promotion of the science, 1974, 1975 i 1976.

Hénon, M.: "Exploration numérique du problème restreint, I i II", *Ann. Ap.,* 28 (1965), 499-511 i 992-1007; III i IV, *Bull. Astron.,* ser. 3.1 fasc. 1 i 2 (1966), 57-79 i 49-66.

Hénon, M.: "Problèmes numériques liés a la recherche des solutions des transformations ponctuelles conservatives", dins *Transformations ponctuelles et leurs applications,* 387-400, Editions du centre national de la recherche scientifique, 1976.

Llibre, J.: "*Sobre la topología del problema de n cuerpos*", Tesina, Universitat de Barcelona, 1975.

Llibre, J.: "Evoluciones finales y movimientos quasi-aleatorios en el problema restringido de 3 cuerpos", Tesi, *Pub. Mat. U.A.B.,* 15, (1979).

Llibre, J., Simó, C.: "Oscillatory solutions in the planar restricted three-body problem", *Math. Ann.,* 248 (1980), 153-184.

Llibre, J., Simó, C.: "Some homoclinic phenomena in the three-body problem", *J. of Differential Equations,* 37 (1980), 444-465.

Llibre, J., Simó, C.: "Estudio cualitativo del problema de Sitnikov", Actas II Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones, Valldoreix, Mayo 1979, *Pub. Mat. U.A.B.,* 18 (1980), 49-71.

Llibre, J., Simó, C.: "A note on a conjecture of Smale", *Indiana Univ. Math. Journal,* 30 (1981), 103-111.

Llibre, J.: "Soluciones homográficas del problema de n-cuerpos", Actes VII Jornades Matemàtiques Hispano-Lusitanes, Sant Feliu de Guíxols, 1980, *Pub. Mat. U.A.B.*, 27 (1980).

McGehee, R.: "Triple collision in the collinear three-body problem", *Inventiones Math.*, 27 (1974) 191-227.

Marchal, C.: "Qualitative methods and results in Celestial Mechanics", dins *Long-Time Predictions in Dynamics*, Ed. V. Szelehely, B. D. Tapley, 181-208, Reidel, 1976.

Markus, L., Meyer, K. R.: "Generic hamiltonian dynamical systems are neither integrable nor ergodic", *Memoirs of the Am. Math. Soc.*, **144**, 1974.

Mather, J. N.: "Area preserving twist homeomorphism of the annulus", *Comment. Math. Helvetici*, 54 (1979), 387-404.

Moser, J.: "Non existence of integrals for canonical systems of Differential Equations", *Comm. on Pure and Appl. Math.*, 8 (1955), 409-436.

Moser, J.: "On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus", *Nach. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klass.* 1 (1962), 1-20.

Moser, J.: "*Stable and random motion in dynamical systems*", Princeton Univ. Press, 1973.

Poincaré, H.: "*Oeuvres de Henri Poincaré*", I, II, II, IV, V, VII, VIII i IX, Gauthier-Villars, París, 1916-1954.

Poincaré, H.: "*Les méthodes nouvelles de la Mecánique*", I, II i III, Céleste, Gauthier-Villars, París, 1892, 1893, 1899.

Poincaré, H.: "*Leçons de Mécanique Céleste*", I, II i III, Gauthier-Villars, París, 1934.

Siegel, C. L., Moser, J. K.: "*Lectures on Celestial Mechanics*", Springer-Verlag, 1971.

Simó, C.: "*La variedad de órbitas keplerianas y la teoría general de perturbaciones*", Tesi, Universitat de Barcelona, 1974.

Simó, C.: "El problema de n cuerpos", *Pub Mat. U.A.B.*, 2 (1976), 38-68.

Simó, C.: "Relative equilibrium solutions in the four body problem", *Celestial Mechanics*, **18** (1978), 165-184.

Simó, C.: "Masses for which triple collision is regularizable", *Celestial Mechanics*, **21** (1980), 25-36.

Simó, C., Llibre, J.: "Characterization of transfersal homothetic solutions in the n-body problem", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 77 (1981), 189-198.

Smale, S.: "Topology and mechanics", *Inventiones Math.*, **10** (1970), 305-331; **11** (1970), 45-64.

Stenberg, S.: "*Celestial Mechanics*", Benjamin, 1969.

Stiefel, E. L., Scheifde, G.: "*Linear and regular Celestial Mechanics*", Springer-Verlag, 1971.

Szebehely, V.: "*Theory of orbits*", Academic Press, 1967.

Wintner, A.: "*The analytical foundations of Celestial Mechanics*", Princeton Univ. Press, 1941.